Analízis szigorlat

# Differenciál egyenletek

## Definíciók

* Differenciál egyenlet
  + Olyan egyenlet amiben az ismeretlen egy függvény, és az egyenlet két oldalán ezen függvény deriváltjai szerepelnek
* Csoportosításuk
  + Implicit / explicit (nullára rendezhető, vagy nem)
  + Egyváltozós / parciális (az ismeretlen függvény egyváltozós-e)
  + Lineáris (felírható )
  + Elsőrendű / másodrendű / többedrendű (az egyenletbeli legmagasabb derivált határozza meg)
* Cauchy probléma (elsőrendű eset)
  + Adott egy y’(x) = f( y(x), x ) és egy y(x0) = y0 kezdőfeltétel
* Szeparálható diffegyenletek
  + y’(x) = f(x) \* g(y(x)) alakú diffegyenletek
* Lineáris terek
  + Olyan (a valós számtest felett értelmezett) terek, melyekben értelmezett az összeadás és (skalárral) szorzás, továbbá ezek kommutatívak és asszociatívak
* Lineáris függvény
  + ÉK és ÉT lineáris terek
  + f(a + b) = f(a) + f(b)
  + f(a\*b) = a\*f(b)
* Elsőrendű homogén lineáris diffegyenletek
  + y’(x) + a(x) \* y(x) = 0 alakúak
* Elsőrendű inhomogén lineáris diffegyenletek
  + y’(x) + a(x) \* y(x) = b(x) alakúak
* Vonalelem
  + Egy (x0, y0) pontba felrajzolt

## Tételek

* A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása
  + akkor megoldása egy y’(x) = f( y(x), x ) diffegyenletnek, ha
* Elsőrendű homogén lineáris diffegyenletek
  + Megoldásai lineáris teret alkotnak
  + Bármilyen kezdetiérték problémával megoldhatók
  + Az általános megoldás egyértelmű
  + Megoldásai előállnak C \* y0(x) alakban, ahol y0(x) egy partikuláris megoldás
  + BIZONYÍTÁS
    - Veszünk két partikuláris megoldást és megmutatjuk, hogy az összegük és a konstansszorosaik is megoldások
* Elsőrendű inhomogén lineáris diffegyenletek
  + Általános megoldása előáll a homogén általános megoldása és egy partikuláris megoldás összegeként
  + Állandó variálásával megadható egy partikuláris megoldás
  + BIZONYÍTÁS (1.)
    - Ha adott két partikuláris megoldás, akkor ezek különbsége megoldja a homogén egyenletet
    - Vagyis a homogén egyenlet megoldása + egy partikuláris megoldás visszaadja a többi partikuláris megoldást (vagyis ez az általános alak)